La clase pasada vimos la distribución

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

en donde X cuenta el número de éxitos cuando un número de experimentos Bernoulli(p) es muy grande

$$\Rightarrow \quad p \to 0$$

y $\lambda = np$ el numero promedio de éxitos permanece constante

Una manera de escribir a la Poisson es tomar

$$X \sim \text{Poisson}(rt) \quad , \quad \lambda = rt$$

Con esta parametrización X cuenta el numero de éxitos en un intervalo de longitud t y r es el número promedio de éxitos en el intervalo unitario. A r suele llamársele la intensidad

$\Rightarrow$ rt es el numero promedio de exitos en el intervalo $[0, t]$

Para obtener a la distribución exponencial, vamos a definir a la v.a. X como el tiempo de espera hasta antes del primer éxito.

$\Rightarrow X \sim \text{Poisson}(rt)$

cuenta el numero de exitos en el intervalo de tiempo $(0,t)$

y T modela el tiempo hasta que ocurre el primer éxito

$$\Rightarrow P(X=0) = P(T>t)$$

$$\{x \mid X=0\} \equiv \{t \mid T>t\}$$

X no ha alcanzado a contar un éxito en el intervalo $(0,t)$ $\iff$ el tiempo t es menor al tiempo necesario para que ocurra el primer éxito

Como $f_X(x) = \dfrac{(rt)^x e^{-rt}}{x!}$, $x=0,1,2,\ldots$

$$\Rightarrow P(T>t) = P(X=0) = f(0) = e^{-rt}$$

$$\Rightarrow 1-P(T>t) = 1-e^{-rt}$$

$$\iff P(T\leq t) = 1-e^{-rt}$$

$$F_T(t) = 1-e^{-rt}$$

$$\Rightarrow \quad f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = r e^{-rt}, \quad t > 0$$

$\Rightarrow$ Una distribución exponencial $T \sim Exp(r)$ tiene función de distribución de probabilidad

$$f_T(t) = r e^{-rt}, \quad t > 0$$

y modela el tiempo antes de que ocurra el primer éxito en un experimento Poisson con tasa o intensidad constante r

En muchas ocasiones suele parametrizarse a la $T \sim Exp(r)$

$$f_T(t) = 1/r \, e^{-1/r \, t}, \quad t > 0$$

¿ $f_T(t)$ es una distribución de probabilidad?

Claramente $f_T(t) \geq 0 \quad \forall \ t > 0$

$$\int_0^\infty f_T(t)\, dt = \int_0^\infty r e^{-rt}\, dt$$

$u = -rt \Rightarrow du = -r\,dt$

$t \to \infty \Rightarrow u \to \infty$

$t = 0 \Rightarrow u = 0$

$$= -\int_0^{-\infty} e^{u}\,du = \int_{-\infty}^{0} e^{u}\,du = e^{0} - e^{-\infty}$$

$$= 1$$

No vamos a ver mas características de la v.a. $Exp(r)$ pues es un caso particular de la v.a. $Gamma(K, r)$.

Si $X \sim Gamma(K, r)$

$\Rightarrow$ X modela el tiempo de espera hasta el K-ésimo éxito en experimentos $Poisson(rt)$

$$f_T(t) = \frac{r^K}{\Gamma(K)} t^{K-1} e^{-rt}, \quad t > 0$$

En donde $\Gamma(K) = \int_0^{\infty} t^{K-1} e^{-t}\,dt$

Esta función tiene las siguientes características

$$\Gamma(K+1) = K\,\Gamma(K)$$

Y si $K \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \Gamma(K) = (K-1)! \Rightarrow \Gamma(1) = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathrm{Exp}(r) \equiv \mathrm{Gamma}(1, r)}}$$

¿Es una función de distribución de probabilidad?

$f(t) \geq 0$ y

$$\int_0^\infty \frac{r^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-rt}\, dt$$

$$u = rt \Rightarrow du = r\,dt$$

$$\frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\infty (rt)^{k-1} e^{-rt}\, r\,dt$$

$$\frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\infty u^{k-1} e^{-u}\, du = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k)} = 1$$

$$X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$$

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{Xt}) = \int_0^\infty e^{xt} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}\, dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-(\beta-t)x} \, dx$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{(\beta-t)^\alpha} \int_0^\infty \cancelto{1}{\frac{(\beta-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-(\beta-t)x} \, dx}$$

$$= \left(\frac{1}{1-t/\beta}\right)^\alpha$$

Si $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$

$$\Rightarrow M_X(t) = (1 - t/\beta)^{-\alpha}$$

$$\frac{d}{dt} M_X(t) = -\alpha(-1/\beta)(1 - t/\beta)^{-\alpha-1}$$

$$= \alpha/\beta \, (1 - t/\beta)^{-\alpha-1} \Big|_{t=0}$$

$$= \alpha/\beta$$

$$\mathbb{E}(X) = \alpha/\beta$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\left[-(\alpha+1)\right]\left[-\frac{1}{\beta}\right]\left(1-\frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha-2}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta^2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta^2} - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

Si $X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Coeficiente de asimetría

$$\gamma_3 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\mathbb{E}((X-\mu)^3)}{\sigma^3}$$

$$\gamma_4 = 3 + \frac{6}{\alpha} = \frac{\mathbb{E}((X-\mu)^4)}{\sigma^4}$$

Hemos visto que las distribuciones de probabilidad nos ayudan a describir el comportamiento agregado de un cierto fenómeno. Sin embargo, las distribuciones generalmente dependen de parámetros que gobiernan su comportamiento y que no conocemos.

Una manera de estimar estos parámetros es vía el método de momentos. Tenemos $f_X(x)$ ← la función de distribución de probabilidades y depende del parámetro $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)$ que no conocemos

→ Igualamos los K momentos muestrales con los K momentos poblacionales

$$\underbrace{\mathbb{E}(X^j)}_{\substack{\text{función de} \\ \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^j \quad , \quad j = 1, 2, \dots, K$$

Por ejemplo: Si pensamos que $x_1, x_2, \dots, x_n$ ← n observaciones vienen de una Gamma(α, β). Quizá porque hacemos un histograma o porque cierta teoría que así lo indica

$\Rightarrow$ Como $\theta = (\alpha, \beta) \Rightarrow K = 2$

$$\mathbb{E}(X) = \alpha/\beta = \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \underline{1}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \quad \underline{2}$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha}_n = \beta \bar{X}_n \quad \text{de } \underline{1}$$

sustituyendo en 2

$$\frac{\beta \bar{X}_n (\beta \bar{X}_n + 1)}{\beta^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\frac{\cancel{\beta^2} \bar{X}_n^2}{\cancel{\beta^2}} + \frac{\beta \bar{X}_n}{\beta^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\Leftrightarrow \bar{X}_n^2 + \frac{1}{\beta}\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_n = \frac{\bar{X}_n}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}_n^2}$$

$$\hat{\alpha}_n = \hat{\beta}_n \bar{X}_n$$